

Stima & Identificazione

Compito del 18 Giugno 2012, ore 8:30, Aula 120, Edificio di Santa Marta

Problema 1 - Si consideri il segnale y_t generato dal seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} x_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_t \\ y_t = [0 \ 1] x_t + v_t \\ w_t \sim wn(0, 1) \\ v_t \sim wn(0, 6) \end{cases}$$

con w_t e v_t incorrelati.

(a) Si dica, giustificando la risposta, se y_t è stazionario.

(b) Determinare le equazioni di stato del predittore di Kalman stazionario (ad un passo) e la funzione di trasferimento di tale predittore. Determinare anche la matrice di covarianza a regime $P \triangleq E [\tilde{x}_{t|t-1} \tilde{x}_{t|t-1}^T]$ e la varianza del predittore $E [\tilde{y}_{t|t-1}^2]$.

(c) Determinare le equazioni di stato del filtro di Kalman stazionario che propaga la stima $\hat{x}_{t|t}$ e le funzioni di trasferimento da y_t alle due componenti di $\hat{x}_{t|t}$. Determinare anche la matrice di covarianza a regime $M \triangleq E [\tilde{x}_{t|t} \tilde{x}_{t|t}^T]$.

(d) Progettare un osservatore deadbeat per lo stato del sistema dinamico e confrontare la varianza asintotica della stima dello stato fornita dall'osservatore deadbeat con quella del predittore di Kalman stazionario. Quali sono gli autovalori di $A - KC$ nei casi di osservatore deadbeat e di predittore stazionario di Kalman ?

Problema 2 -

a) Determinare i parametri a_1 e a_2 di un processo AR(2)

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = e_t$$

sapendo che $e_t \sim wn(0, 1)$, $R_y(0) = \frac{48}{35}$, $R_y(1) = -\frac{8}{35}$ e $R_y(2) = \frac{74}{105}$.

b) Determinare successivamente i predittori $\hat{y}_{t+T|t} = \hat{G}_T(z)y_t$ a $T = 1, 2, 3$ passi del segnale y_t ed i relativi rendimenti di predizione $\eta_T \triangleq E [\tilde{y}_{t+T|t}^2] / E [y_t^2]$.

Problema 3 - Un sensore di posizione RSS (Received Signal Strength) fornisce misure di distanza di un oggetto in posizione incognita $p = (p_x, p_y, p_z)$ mediante la relazione

$$y = \varrho - 5\alpha p^T p + v$$

dove: y è la misura (di potenza ricevuta) rumorosa del sensore RSS; p è il vettore 3-dimensionale di posizione dell'oggetto da localizzare; $v \sim (0, \sigma_v^2)$ il rumore di misura; ϱ (potenza ricevuta in dBm alla distanza di un metro) e α (esponente di pathloss del canale radio) sono i parametri del sensore. Prima di utilizzare il sensore, occorre stimarne i parametri ϱ ed α . A tale proposito, si possono effettuare varie misure indipendenti y_i ($i = 1, 2, \dots, N \gg 2$) in corrispondenza di posizioni diverse e

note p_i dell'oggetto da localizzare. Impostare il problema di stima lineare dei parametri ϱ ed α dalle osservazioni indipendenti y_1, y_2, \dots, y_N scrivendo un algoritmo ricorsivo che permette di aggiornare le stime $\hat{\varrho}$ e $\hat{\alpha}$ di tali parametri e le relative varianze man mano che vengono acquisite nuove osservazioni.

Problema 4 - Dato il sistema

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= Ax_t + Dw_t \\y_t &= Cx_t + v_t \\z_t &= Hx_t\end{aligned}$$

determinare l'equazione di aggiornamento della stima $\hat{x}_{t|t}$ del filtro di Kalman stazionario nella forma

$$\hat{x}_{t|t} = \Phi \hat{x}_{t-1|t-1} + \Psi y_t$$

trovando l'espressione delle matrici Φ e Ψ in funzione delle matrici A, C ed L (guadagno di correzione di Kalman). Verificare più che la stima lineare ottima di z_t basata sulle osservazioni $y^t = \{y_k; k \leq t\}$ è ottenuta elaborando y_t con un filtro lineare causale di funzione di trasferimento

$$G(z) = zH(zI - A + LCA)^{-1}L$$